Compensation paramétrique

- Quand?
  - Nous utilisons la méthode paramétrique dans les cas *où les quantités inconnues ne sont pas mesurées directement*, mais sont déterminées par d'autres quantités mesurées qui sont dans une relation fonctionnelle avec les paramètres (inconnues).
  - La compensation peu avoir lieu lorsque nous effectuons des mesures redondantes afin de pouvoir construire *plus d'équations qu'il n'y a des paramètres*.
  - exemples:
    - pluie → crues ↑
    - GPS: distances → position, facteurs d'environnement, …
- Quel est l'objectif ?
  - Par compensation nous recherchons
    - les valeurs les plus fiables des paramètres et de leurs écarts types, ainsi que
    - des mesures compensées et de leurs écarts types.

Compensation paramétrique

1. Formulation du problème
   - Une *série de mesures* (éventuellement répétées) sont prises, généralement avec des degrés de *précision variables*.

   - Chaque mesure (ou groupe de mesures répétées) est traitée comme une sélection aléatoire fonctionnellement liée aux paramètres (x) inconnus.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \ell_1 - v_1 & = & f_1(x_1, \ldots, x_u) \\ & \vdots & \\ \ell_n - v_1 & = & f_n(x_1, \ldots, x_u) \end{array} \right.$$

   - On cherche à déterminer des *observations* et les *paramètres* compensés
     - qui satisfont les équations paramétriques,
     - avec la condition de moindres carrés des résidus $\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}} \longrightarrow \mathrm{minimum}$

Compensation paramétrique

2. Formulation générale (non-linéaire)
   - Les équations paramétriques sont généralement pas linéaires.
     - Dans ce cas on les *linéarise dans voisi*nage de valeurs approchées de paramètres $\mathring{\mathbf{x}}$ (x bulle) lesquelles peuvent être obtenues par la résolution d'un sous-système des u équations

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathring{\mathbf{x}}) + \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathring{x}} \cdot (\mathbf{x} - \mathring{\mathbf{x}}) = \mathring{\ell} + \mathbf{A} \cdot \delta\mathbf{x}$$

     - ou $\mathring{\ell} \equiv f(\mathring{\mathbf{x}})$

   - Il convient de définir le *observation réduit* ou le <u>résidu approché</u> étant égal à la mesure mois son modèle approché (OMC: Observed Minus Computed)
     - $\mathring{\mathbf{v}} \equiv \ell - f(\mathring{\mathbf{x}})$
     - lorsque l'on considère les observations minus leurs résidus on obtienne le modèle fonctionnelle (linéaire) classique:

$$\mathring{\mathbf{v}} - \mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \delta\mathbf{x}$$

Compensation paramétrique

2. Formulation générale (non-linéaire)

- Taille de system:
  - n équation avec u paramètres
  - (n + u) inconnues (v et x)

$$\underset{n\times 1}{\mathring{\mathbf{v}}} - \underset{n\times 1}{\mathbf{v}} = \underset{n\times u}{\mathbf{A}} \cdot \underset{u\times 1}{\delta\mathbf{x}}$$

- Forme étendue:

-

$$\begin{bmatrix} \mathring{v}_1 \\ \mathring{v}_2 \\ \vdots \\ \mathring{v}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_u} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_u \end{bmatrix}$$

Compensation paramétrique

3. Formulation mathématique (synthèse)

- *Mesures:* $(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$ leurs poids $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}^{-1}$

- Les *paramètres* $(x_1, x_2, \ldots, x_u)$ et pour le cas non-linéaire, leurs valeurs approchées $(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, \ldots, \mathring{x}_u)$

- Relations mesures ↔ paramètres: $\ell_i - v_i = f_1(x_1, \ldots, x_u) \;\; i \in < 1, \ldots, n >$

- Pour le cas non-linéaire, les mesures calculées à partir de paramètres approchés $\mathring{\ell} \equiv f(\mathring{\mathbf{x}})$ ainsi que les mesures réduites (= v approchés) $\mathring{\mathbf{v}} \equiv \ell - f(\mathring{\mathbf{x}})$

- Modèle linéaire $\ell - \mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$

- Modèle *linéarisé* $\mathring{\mathbf{v}} - \mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \delta\mathbf{x}$ avec Jacobian $\mathbf{A} = \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathring{x}}$

Compensation paramétrique

5. Dérivation de la méthode de calcul (Chap. 4.2)
   - Sans condition, nous pouvons exprimer les résidus: $\mathbf{v} = \ell - \mathbf{A}\mathbf{x}$ ou $\mathbf{v} = \mathring{\mathbf{v}} - \mathbf{A}\,\delta\mathbf{x}$ pour le cas non-linéaire
   - Objectif: $\Omega = \mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v} \longrightarrow \text{minimum}$

     $$= (\ell - \mathbf{A}\mathbf{x})^T\,\mathbf{P}\,(\ell - \mathbf{A}\mathbf{x}) \;=\; \ell^T\mathbf{P}\ell - 2\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{P}\,\ell + \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\,\mathbf{x}$$

   - Dériver et mettre à zéro pour déterminer le minimum:

     $$\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{x}^T}:\; 2\cdot\mathbf{A}^T\mathbf{P}\ell - 2\cdot\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\,\mathbf{x} = 0 \qquad \Longrightarrow \;\big(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\big)\,\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\,\ell$$

   - On y trouve $\mathbf{x} = \big(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\big)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\ell$ pour le cas linéaire (paramètre) (come pour la régression linéaire)
   - $\delta\mathbf{x} = \big(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\big)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathring{\mathbf{v}}$, $\hat{\mathbf{x}} = \mathring{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}$ pour le cas non-linéaire (incréments) + les paramètres approchés

Compensation paramétrique

6. Itération et convergence
   - Les incréments des paramètres (cas non-linéaire) sont suivant *important* à cause de approximation $\rightarrow$ il faut faire des itérations
   - Dans chaque itération (it):
     - les valeurs des paramètres compensés deviennent des paramètres approchés. $\mathring{\mathbf{x}}_{it+1} = \hat{\mathbf{x}}_{it}$
     - On refait la linéarisation autour des nouveaux paramètres approchés $\rightarrow$ $\mathbf{A}$ changé!
     - On recalcule nouveaux $\mathring{\mathbf{v}} = \ell - f(\mathring{\mathbf{x}})$
     - On recalcule nouveaux $\delta\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathring{\mathbf{v}}$
     - Si $|\delta\mathbf{x}| < \mathrm{tresh.}$ on arrête l'itération

Compensation paramétrique

7. Compensation – synthèse de résultat

- *Parametres* compesés

$$\delta\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathring{\mathbf{v}}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathring{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}$$

- Résidues

$$\mathbf{v} = \mathring{\mathbf{v}} - \mathbf{A}\cdot\delta\mathbf{x}$$

- *Mesures* compensés

$$\hat{\ell} = \ell - \mathbf{v}$$

Compensation paramétrique

7. Les contrôles

- Vérification de la proximité suffisante des valeurs approximatives par rapport aux valeurs compensées, ainsi que l'itération
  - Les résidus I. $\mathbf{v}^{I} = \mathring{\mathbf{v}} - \mathbf{A}\delta\mathbf{x}$
  - Les résidus II. $\mathbf{v}^{II} = \hat{\ell} - f(\hat{\mathbf{x}})$

- $\mathbf{v}^{II} \neq \mathbf{v}^{II}$?
  - erreurs possibles: dans la linéarisation, l'itération et l'attribution des résidus ou observations et paramètres.

Préparation pour mardi – lire Sec. 3.1 + 3.2 (dérivation détaillée)

ME 9-2 : Compensation paramétrique

- Pourquoi des paramètres?
  - observations directs
  - observations indirectes, *vermittelnde Ausgleichung* - merci à:
  - quelques exemples: pluie, crues, …
- Expression du problème
  - Modèle fonctionnel
    - non-linéaire compact – développé – exemple: logarithme sur moodle
    - linéaire – exemple: triangle
  - Modèle stochastique
- Résolution
  - forme quadratique – extremum lié – Lagrange
  - réduction du système d'équations
  - taille des matrices – à inverser: $u \times u$
- Premier résultat
  - paramètres compensés